第 50 卷 第 1 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 50 No. 1
2011 年 1 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jan. 2011

联系两个 n 维单形的不等式及应用*

杨世国[1]，钱 娣[2]
（1. 合肥师范学院数学系，安徽 合肥 230061；
2. 安徽大学数学科学学院，安徽 合肥 230039）

摘 要：利用距离几何的理论与方法，研究了欧氏空间 E^n 中涉及两个单形棱长和体积的几何不等式问题，建立了涉及两个 n 维单形棱长与体积的两个几何不等式，推广了 E^n 中 n 维 Pedoe 不等式和彭－常不等式。

关键词：欧氏空间；单形；棱长；体积；不等式

中图分类号：O184 **文献标志码：**A **文章编号：**0529－6579（2011）01－0027－04

Inequalities for Two n-Dimensional Simplexes with Applications

YANG Shiguo[1], *QIAN Di*[2]
(1. Department of Mathematics, Hefei Teachers College, Hefei 230061, China;
2. School of Mathematics Sciences, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: Using the theory and method of distance geometry, the problems about geometric inequalities for the edge-lengths and volumes of two n -dimensional simplexes in the Euclidean space E^n are studied. Two geometric inequalities for the edge-lengths and volumes of two n-dimensional simplexes are established, and the n-dimensional Pedoe inequality and Peng-Chang inequality are improved.

Key words: Euclidean space; simplex; edge-length; volume; circumradius; inequality

设 n 维欧氏空间 E^n 中 n 维单形 Ω_n 的体积为 V，棱长为 $a_i(i=1,2,\cdots,\frac{1}{2}n(n+1))$，各侧面面积为 $F_i(i=1,2,\cdots,n+1)$，它的外接球半径与内切球半径分别为 R，r。单形 Ω_n 不过同一顶点的两条棱称为一对对棱，它的各对对棱所成角的算术平均值记为 θ。对另一个 n 维单形 Ω'_n 有类似记号，比如体积为 V'，棱长为 $a'_i(i=1,2,\cdots,\frac{1}{2}n(n+1))$。

对任意三个实数 $\alpha,\beta\in(0,1],\lambda\in[2,n]$，记

$$S_{\alpha,\beta}^{\lambda}=\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)}a'^{2\alpha}_i\left(\sum_{j=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)}a_j^{2\beta}-\lambda a_i^{2\beta}\right)\qquad(1)$$

杨路与张景中率先将三角形 Pedoe 不等式推广到 n 维单形，建立了一种形式的 n 维 Pedoe 不等式[1]。

随后苏化明建立另一种形式的 n 维 Pedoe 不等式[2]

$$S_{1,1}^2\geqslant n(n+1)(n^2+n-4)\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n}}(VV')^{\frac{2}{n}}\qquad(2)$$

文献［3］给出不等式（2）的指数推广，得

$$S_{\alpha,\alpha}^2\geqslant 2^{2\alpha-2}n(n+1)(n^2+n-4)\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}}(VV')^{\frac{2\alpha}{n}}\qquad(3)$$

文献［4］给出不等式（2）另一种推广，得

$$S_{1,1}^{\lambda}\geqslant n(n+1)(n^2+n-2\lambda)\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n}}(VV')^{\frac{2}{n}}\qquad(4)$$

文献［5］给出不等式（2）－（4）的加强推广，得

* 收稿日期：2010－01－11
基金项目：国家自然科学基金资助项目（60671051）；安徽省高校省级重点资助项目（KJ2009A45）
作者简介：杨世国（1951 年生），男，教授，博士生导师；通讯作者：钱娣；E-mail：qiandi1204@126.com

$$S^{\lambda}_{\alpha,\beta} \geqslant n(n+1)(n^2+n-2\lambda)2^{\alpha+\beta-2}\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{n}} \cdot (V^{\beta}V'^{\alpha})^{\frac{2}{n}} + H^{\lambda}_{\alpha,\beta}, H^{\lambda}_{\alpha,\beta} \geqslant 0 \tag{5}$$

文献［6］给出不等式（2）-（4）另一种加强推广，得

$$S^{\lambda}_{\alpha,\beta} \geqslant [(\csc\theta')^{\alpha} \cdot (\csc\theta)^{\beta}]^{\frac{1}{(n-1)^2}} n(n+1) \cdot (n^2+n-2\lambda)2^{\alpha+\beta-2}\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{n}}(V^{\beta}V'^{\alpha})^{\frac{2}{n}} \tag{6}$$

当 Ω_n 与 Ω'_n 皆为正则单形时，（2）-（6）式中等号成立。

1 主要结果

本文研究单形的类似问题，建立如下加强形式 n 维彭－常不等式，推广了上述结果。记 $\sigma = \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i^{2\beta}, \sigma' = \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i'^{2\alpha}$。

定理1 对 E^n 中两个 n 维单形 Ω_n 与 $\Omega'_n (n>2)$，有

$$S^{\lambda}_{\alpha,\beta} \geqslant 2^{-3}n(n+1)(n^2+n-2\lambda) \cdot \left[(\csc\theta)^{\frac{2\beta}{(n-1)^2}}\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\beta}{n}}2^{2\beta}\frac{\sigma'}{\sigma}V^{\frac{4\beta}{n}} + (\csc\theta')^{\frac{2\alpha}{(n-1)^2}}\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}}2^{2\alpha}\frac{\sigma}{\sigma'}V'^{\frac{4\alpha}{n}}\right] \tag{7}$$

当 Ω_n 与 Ω'_n 皆为正则单形时等号成立。

不等式（7）比不等式（6）更强，实际上不等式（7）的右端应用算术－几何平均不等式便得不等式（6）。

定理2 对 E^n 中两个 n 维单形 Ω_n 与 $\Omega'_n (n>2)$，有

$$S^{\lambda}_{\alpha,\beta} \geqslant \frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n-2\lambda) \cdot \left[\left(\frac{R}{nr}\right)^{\frac{4\beta}{n(n+1)(n-1)^2}}\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\beta}{n}}2^{2\beta}\frac{\sigma'}{\sigma}V^{\frac{4\beta}{n}} + \left(\frac{R'}{nr'}\right)^{\frac{4\alpha}{n(n+1)(n-1)^2}}\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}}2^{2\alpha}\frac{\sigma}{\sigma'}V'^{\frac{4\alpha}{n}}\right] \tag{8}$$

当 Ω_n 与 Ω'_n 皆为正则单形时等号成立。

由不等式（7）与算术－几何平均不等式便得不等式（9）。

推论1 对 E^n 中两个 n 维单形 Ω_n 与 $\Omega'_n (n>2)$，有

$$S^{\lambda}_{\alpha,\beta} \geqslant \left[\left(\frac{R}{nr}\right)^{\beta} \cdot \left(\frac{R'}{nr'}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{2}{n(n+1)(n-1)^2}} n(n+1) \cdot (n^2+n-2\lambda)2^{\alpha+\beta-2}\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{n}}(V'^{\alpha}V^{\beta})^{\frac{2}{n}} \tag{9}$$

当 Ω_n 与 Ω'_n 皆为正则单形时等号成立。

由于 $\left(\frac{R}{nr}\right) \cdot \left(\frac{R'}{nr'}\right) \geqslant 1$，且当单形的外接球半径固定时，内切球半径可以足够小，因此 $\left(\frac{R}{nr}\right) \cdot \left(\frac{R'}{nr'}\right)$ 可以足够大，因此不等式（9）对不等式（2）-（4）作了实质性推广。

2 引理与定理的证明

为了证明上面两个定理，我们需要下面几个引理。

引理1 对 n 维单形 Ω_n 成立不等式

$$\prod_{i=1}^{n+1} F_i \geqslant \left(\frac{R}{nr}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \frac{n^{\frac{3}{2}(n+1)}}{(n!)^{\frac{n+1}{n}}(n+1)^{\frac{n^2-1}{2n}}} V^{\frac{n^2-1}{n}} \tag{10}$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} F_i \geqslant (\csc\theta)^{\frac{n+1}{2(n-1)}} \frac{n^{\frac{3}{2}(n+1)}}{(n!)^{\frac{n+1}{n}}(n+1)^{\frac{n^2-1}{2n}}} V^{\frac{n^2-1}{n}} \tag{11}$$

当 Ω_n 为正则单形时（10）式，（11）式等号成立。

证明 应用文献［7］中两个不等式

$$\prod_{i=1}^{n+1} F_i \geqslant \left[\frac{n^{3n^2-4}}{(n+1)^{n^2-n-2}}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}\left[\frac{1}{(n!)^n}V^{n^2-n-1}R\right]^{\frac{1}{n+1}} \tag{12}$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} F_i \geqslant \left[\frac{n^{3(n-1)}}{2(n+1)^{n-2}(n!)^2}\right]^{\frac{n+1}{2(n-1)}} V^{\frac{(n+1)(n-2)}{n-1}} \left(\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i\right)^{\frac{2}{n(n-1)}} \tag{13}$$

当 Ω_n 为正则单形时，（12）式、（13）式等号成立。

应用文献［8-10］中两个不等式

$$\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i \geqslant (\csc\theta)^{\frac{n(n+1)}{4}}\left(\frac{2^n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{4}}(n!V)^{\frac{n+1}{2}} \tag{14}$$

$$\frac{1}{V} \geqslant \frac{n^{\frac{n-2}{2}}n!}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{1}{R^{n-1}r} \tag{15}$$

当 Ω_n 为正则单形时等号成立。

由（13）式与（14）式便得（11）式。另外（12）式可写为

$$\prod_{i=1}^{n+1} F_i \geqslant \left[\frac{n^{3n^2-4}}{(n+1)^{n^2-n-2}}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}\left[\frac{1}{(n!)^n}\frac{V^{\frac{(n^2-1)(n-1)}{n}}}{V^{\frac{1}{n}}}R\right]^{\frac{1}{n-1}}$$

则由上式与（15）式便得（10）式。

引理2 对 n 维单形 Ω_n，有

$$\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i \geqslant \left(\frac{R}{nr}\right)^{\frac{1}{2(n-1)^2}}\left(\frac{2^n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{4}}(n!V)^{\frac{n+1}{2}} \tag{16}$$

当 Ω_n 为正则单形时等号成立。

证明　引用文献［11］中不等式

$$\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i \geqslant \left(\frac{2\cdot n!^2}{n^3}\right)^{\frac{n(n+1)}{4}}\left(\prod_{i=1}^{n+1}F_i\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} \quad (17)$$

当 Ω_n 为正则单形时等号成立。

由不等式（17）与（10）便得不等式（16）。

引理 3[3,12]　设 ΔABC 三边 a，b，c，面积为 $\Delta,\alpha\in(0,1]$，则有

$$3\left(\frac{16\Delta^2}{3}\right)^{\alpha} \leqslant 2b^{2\alpha}c^{2\alpha}+2c^{2\alpha}a^{2\alpha}+ 2a^{2\alpha}b^{2\alpha}-a^{4\alpha}-b^{4\alpha}-c^{4\alpha} \quad (18)$$

当 ΔABC 为正三角形时等号成立。

引理 4　设 n 维单形 Ω_n 的所有二维子单形的二维体积的乘积为 M_2，则

$$M_2 \geqslant (\csc\theta)^{\frac{n(n+1)}{6(n-1)}}\cdot\left[\frac{3^{\frac{n}{2}}n!^2}{2^n(n+1)}\right]^{\frac{n^2-1}{6}}V^{\frac{n^2-1}{3}} \quad (19)$$

$$M_2 \geqslant \left(\frac{R}{nr}\right)^{\frac{1}{3(n-1)}}\cdot\left[\frac{3^{\frac{n}{2}}n!^2}{2^n(n+1)}\right]^{\frac{n^2-1}{6}}V^{\frac{n^2-1}{3}} \quad (20)$$

当 Ω_n 为正则单形时，(19)、(20) 式中等号成立。

证明　引用文献［11］中结果

$$M_2 \geqslant \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{n!^2}{n^3}\right)\right]^{\frac{1}{6}n(n^2+1)}\left(\prod_{i=1}^{n+1}F_i\right)^{\frac{n}{3}} \quad (21)$$

当 Ω_n 为正则单形时等号成立。

由不等式 (21)、(10) 和 (11) 便得不等式 (19)、(20)。

引理 5　对 n 维单形 Ω_n，$\alpha\in(0,1],\lambda\in[2,n]$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)}a_i^{2\alpha}\right)^2-\lambda\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)}a_i^{4\alpha} \geqslant (\csc\theta)^{\frac{2\alpha}{(n-1)^2}}2^{2\alpha-2}n(n+1)\cdot (n^2+n-2\lambda)\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}}V^{\frac{4\alpha}{n}} \quad (22)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)}a_i^{2\alpha}\right)^2-\lambda\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)}a_i^{4\alpha} \geqslant \left(\frac{R}{nr}\right)^{\frac{4\alpha}{n(n+1)(n-1)^2}}2^{2\alpha-2}\cdot n(n+1)(n^2+n-2\lambda)\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}}V^{\frac{4\alpha}{n}} \quad (23)$$

当 Ω_n 为正则单形时等号成立。

证明　先证 $\lambda=n$ 时不等式（22）成立，此时不等式（22）为

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant\frac{1}{2}n(n+1)}a_i^{2\alpha}a_j^{2\alpha}-(n-1)\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)}a_i^{4\alpha} \geqslant (\csc\theta)^{\frac{2\alpha}{(n-1)^2}}2^{2\alpha-2}n^2(n^2-1)\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}}V^{\frac{4\alpha}{n}} \quad (24)$$

由于单形 Ω_n 共有 C_{n+1}^3 个二维子单形（三角形）$\Delta_k(k=1,2,\cdots,C_{n+1}^3)$，设三角形 Δ_k 的三边 a_{k1},a_{k2},a_{k3}，面积为 Δ_k。

$$(24)\text{左端}=\sum_{k=1}^{C_{n+1}^3}(2a_{k2}^{2\alpha}a_{k3}^{2\alpha}+2a_{k3}^{2\alpha}a_{k1}^{2\alpha}+ 2a_{k1}^{2\alpha}a_{k2}^{2\alpha}-a_{k1}^{4\alpha}-a_{k2}^{4\alpha}-a_{k3}^{4\alpha})+\tau$$

其中 τ 是 $2C_{\frac{1}{2}n(n+1)}^2-C_{n+1}^3=6C_{n+1}^4$ 项 $a_i^{2\alpha}a_j^{2\alpha}$ 之和，且 a_i 与 a_j 不是单形 Ω_n 一个二维子单形（三角形）的两边。应用引理 4，得

$$(24)\text{左端}\geqslant\sum_{k=1}^{C_{n+1}^3}3\left(\frac{16\Delta_k^2}{3}\right)^{\alpha}+\tau$$

利用算术－几何平均不等式与不等式（19）、(14) 得

$$(24)\text{左端}\geqslant 3C_{n+1}^3\left(\frac{16}{3}\right)^{\alpha}(M_2)^{\frac{2\alpha}{C_{n+1}^3}}+ 6C_{n+1}^4\left(\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)}a_i\right)^{\frac{8\alpha}{n(n+1)}} \geqslant (\csc\theta)^{\frac{2\alpha}{(n-1)^2}}3\left(\frac{16}{3}\right)^{\alpha}C_{n+1}^3\left[\frac{3^{\frac{n}{2}}n!^2}{2^n(n+1)}\right]^{\frac{2\alpha}{n}}V^{\frac{4\alpha}{n}}+ 6C_{n+1}^4(\csc\theta)^{2\alpha}\left(\frac{2^n\cdot n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}}V^{\frac{4\alpha}{n}}$$

因为 $\csc\theta\geqslant 1$，且 $n>2$ 时，$2\alpha>\dfrac{2\alpha}{(n-1)^2}$，所以 $(\csc\theta)^{2\alpha}\geqslant(\csc\theta)^{\frac{2\alpha}{(n-1)^2}}$，从而有

$$(24)\text{左端}\geqslant(\csc\theta)^{\frac{2\alpha}{(n-1)^2}}2^{2\alpha-2}n^2(n^2-1)\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}}V^{\frac{4\alpha}{n}},$$

所以（24）式成立。

下面证明不等式（22）式对 $2\leqslant\lambda<n$ 成立。此时

$$(22)\text{左端}=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant\frac{1}{2}n(n+1)}a_i^{2\alpha}a_j^{2\alpha}- (\lambda-1)\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)}a_i^{4\alpha}=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant\frac{1}{2}n(n+1)}a_i^{2\alpha}a_j^{2\alpha}- (n-1)\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)}a_i^{4\alpha}+(n-\lambda)\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)}a_i^{4\alpha}$$

利用（24）式、算术－几何平均不等式，得

$$(22)\text{左端}\geqslant(\csc\theta)^{\frac{2\alpha}{(n-1)^2}}2^{2\alpha-2}n^2(n^2-1)\cdot \left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}}V^{\frac{4\alpha}{n}}+(n-\lambda)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\left(\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)}a_i\right)^{\frac{8\alpha}{n(n+1)}} \quad (25)$$

由（14）式可知

$$\left(\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i\right)^{\frac{8\alpha}{n(n+1)}} \geqslant (\csc\theta)^{2\alpha}\left(\frac{2^n n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}} V^{\frac{4\alpha}{n}} \geqslant$$

$$(\csc\theta)^{\frac{2\alpha}{(n-1)^2}} 2^{\alpha}\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}} V^{\frac{4\alpha}{n}} \qquad (26)$$

由（25）式、（26）式便知（22）式成立。易知当 Ω_n 为正则单形时，（22）式中等号成立。

用同样的方法可证明不等式（23）式成立，证明过程中只需要将应用不等式（19）换成不等式（20），应用不等式（14）换成不等式（16）即可，具体过程不再赘述。

定理1的证明 记 $p = \sigma^2 - \lambda \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i^{4\beta}, p' = \sigma'^2 - \lambda \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i'^{4\alpha}$，则有

$$S_{\alpha,\beta}^{\lambda} = \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i'^{2\alpha}\left(\sum_{j=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_j^{2\beta} - \lambda a_i^{2\beta}\right) =$$

$$\sigma\sigma' - \lambda \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_j^{2\beta} a_i'^{2\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}p + \frac{\sigma}{\sigma'}p'\right) + \varphi \qquad (27)$$

其中 $\varphi = \frac{\lambda}{2\sigma\sigma'} \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} (\sigma' a_i^{2\beta} - \sigma a_i'^{2\alpha})^2 \geqslant 0$。

由（27）式与不等式（22）便得不等式（7）。易知当 Ω_n 为正则单形时，（7）式中等号成立。

用同样方法可证明定理2中的不等式（8）成立。

参考文献：

[1] 杨路,张景中. Neuberg-Pedoe 不等式的高维推广及其应用[J]. 数学学报, 1981, 24(3):401-408.

[2] SU H M. Two inequalities for the simplexes [J]. Chinese Sci Bull, 1987, 32(1):1-3.

[3] 陈计,马援. 涉及两个单形的一类不等式[J]. 数学研究与评论, 1989, 9(2):282-284.

[4] 毛其吉. 联系两个单形的不等式[J]. 数学的实践与认识, 1989,19(3):23-25.

[5] 李迈龙. 高维 Neuberg-pedoe 不等式的推广[J]. 数学的实践与认识, 2004,34 (4):142-146.

[6] 杨世国. 涉及两个 n 维单形的不等式[J]. 浙江大学学报:理学版, 2006, 33(3):247-249.

[7] 苏化明. 一个涉及单形体积棱长及侧面面积的不等式[J]. 数学杂志, 1993, 11(2):453-454.

[8] 冷岗松. Euler 不等式的一个加强[J]. 数学的实践与认识, 2004, 25(2):94-96.

[9] 匡继昌. 常用不等式[M]. 济南:山东科学技术出版社, 2004.

[10] OPPENHEIM A. Inequalities involving the elements of triangles, quadrilaterals or tethraedra[J]. Univ Beograd Publ Elektrotehn Fak Ser Mat Fiz, 1974, 496: 257-263.

[11] 苏化明. 关于切点单形的两个不等式[J]. 数学研究与评论, 1990, 10(2):243-247.

[12] 杨世国. n 维 Euler 不等式的推广[J]. 西安工程科技学院学报, 2005, 19(4):503-506.

（上接第26页）

[3] 程惠东,孟新桂,王芳. 一类时滞非自治 Lotka-Volterra 扩散生态系统的全局吸引性[J]. 中山大学学报:自然科学版,2008,47(2):18-22.

[4] 程惠东. 脉冲投放益虫化学控制害虫管理模型[J]. 中山大学学报:自然科学版,2010,49(3):8-11.

[5] MENG X, CHEN L. A stage-structured si eco-epidemiological model with time delay and impulsive controlling [J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2008: 427-440.

[6] GOURLEY S A, KUANG Y. A stage structured predator-prey model and its dependence on through-stage delay and death rate [J]. J Math Biol, 2004, 49:188-200 .

[7] NIETO J J, RODRIGUEZ - LOPEZ R. Periodic boundary value problems for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2006, 31 (8): 593-610.

[8] HASTINGS A. Global stability in two species system [J]. J Math Biol, 1978, 5: 399-403.

[9] WANG W, CHEN L. A predator - prey system with stage structure for predator [J]. Comput Math Appl, 1997, 33 (8): 83-91.

[10] JIAO J J, PANG G P, CHEN L S, et al. A delayed stage-structured predator prey model with impulsive stocking on prey and continuous harvesting on predator [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 195(1): 316-325.

[11] MENG X Z, CHEN L S. Almost periodic solution of non-autonomous Lotka-Volterra predator-prey dispersal system with delays [J]. Journal of Theoretical Biology, 2006, 243:562-574.